

SUCCESIONI E SERIE DI FUNZIONI: DERIVAZIONE

ED INTEGRAZIONE

1

ES. 1 Per ogni $x \in (-1, 1)$ calcolare la somma delle serie

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

Sl: si vede che il raggio di convergenza di questa serie di potenze è $R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n^2}} = 1$ in questo caso, siccome esiste $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = 1$, questa è un'altra formula per il raggio di convergenza).

Una serie di potenze è infinitamente derivabile all'interno del suo disco di convergenza, e la derivata si ottiene derivando ogni membro della serie.

in più c'è convergenza uniforme delle serie su $[-\delta, \delta] \forall \delta < 1$.

Id ogni modo, dalle formule delle serie geometriche,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{d}{dx} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n(x^{n-1}),$$

ma è anche uguale a $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$; per cui

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \quad \text{Moltiplico ambo i membri per } x.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \frac{x}{(1-x)^2} \quad \text{Anche in questo caso il raggio di}$$

convergenza è 1, e possiamo derivare:

$$\frac{d}{dx} \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}$$

$$= \frac{1+x}{(1-x)^3} ; \text{ moltiplico di nuovo per } x :$$

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x$$

□

ES.2 Studiare la convergenza puntuale ed uniforme delle successioni di funzioni

$$f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x \right)^n, \quad x \in \mathbb{R}$$

Calcolare quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f_n(x) dx$

Sol: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ (qui $\sin^2 x = 1$), si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \ln \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x \right)} = 0 \text{ poich\u00e9}$$

$\frac{1}{n} \rightarrow 0$ e $\sin^2 x < 1$, quindi l'argomento del logaritmo diventa < 1 per $n \rightarrow +\infty$, quindi $\ln \left(\frac{1}{n} + \sin^2 x \right) \rightarrow \ln(\sin^2 x) < 0$ ed $e^{n \ln(\sin^2 x)} \rightarrow 0$ per $n \rightarrow +\infty$.

Se invece $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $\sin^2(x) = 1$; ($k \in \mathbb{Z}$)

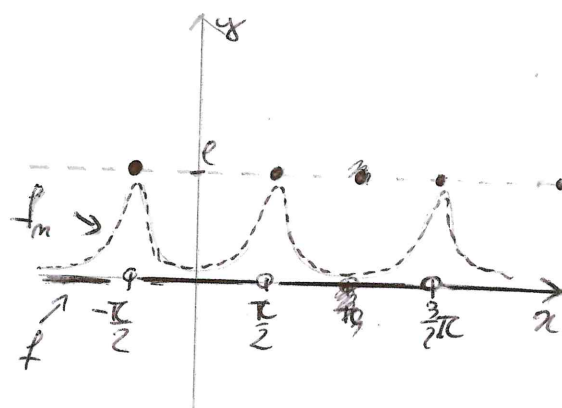
$$f_n \left(\frac{\pi}{2} + k\pi \right) = \left(\frac{1}{n} + 1 \right)^n \rightarrow e \quad (\text{limite notevole}).$$

Da cui $f_n(x) \rightarrow f(x) := \begin{cases} 0 & x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ e & x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$

2

Chiaramente f_n non converge uniformemente ad f su tutto $\mathbb{R}$:

Le f_n sono continue, f ha discontinuità in $x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}$.



Si può aspettarsi convergenza uniforme su ogni intervallo $[a, b]$ t.c. $\frac{\pi}{2} + k\pi < a < b < \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi$.

Restringiamoci (tutte le f_n e f sono periodiche) all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$; $f(\frac{\pi}{2}) = f(-\frac{\pi}{2}) = e$, $f(x) = 0 \quad \forall x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Chiediamo la convergenza uniforme in $[-a, a]$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

$$\sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x)|;$$

$$|f_n(x)| = \left(\frac{1}{n} + \sin^2(x) \right)^n; \text{ inoltre } f'_n(x) = n \left(\frac{1}{n} + \sin^2(x) \right)^{n-1} \cdot \sin(2x);$$

$$f'_n(x) = 0 \text{ su } [-a, a] \text{ con } a < \frac{\pi}{2} \text{ solo in } x=0; \text{ qui vale } f_n(x) = \left(\frac{1}{n} \right)^n;$$

$$\text{e siccome } 0 < a < \frac{\pi}{2}, 0 < \sin^2(a) < 1; \text{ per cui } f_n(\pm a) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2(a) \right)^n;$$

$$\text{Il } \sup_{x \in [-a, a]} f_n(x) \text{ è } f_n(\pm a) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2(a) \right)^n;$$

quindi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} + \sin^2(x) \right)^n = 0,$

poiché $\sin^2(x) < 1$.

C'è convergenza uniforme su ogni $[-a, a] \subset (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Quindi (periodicità) su ogni

$$\left[\frac{\pi}{2} + k\pi + \delta, \frac{\pi}{2} + (k+1)\pi - \delta \right], \quad \forall \delta \in (0, \frac{\pi}{2}).$$

Consideriamo l'intervallo $[0, \pi]$; Da quanto visto prima,

$f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ e su $[\frac{\pi}{2} + \delta, \pi]$.

Ora possiamo dire su $\int_0^\pi f_n(x) dx$?

$$\int_0^\pi f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} f_n(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2} - \delta}^{\frac{\pi}{2} + \delta} f_n(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2} + \delta}^\pi f_n(x) dx;$$

questa relazione è vera per ogni $\delta > 0$ ($\delta < \frac{\pi}{2}$).

Il primo e il terzo integrale vanno a 0 per $n \rightarrow +\infty$:

$f_n \rightarrow f$ uniformemente su $[0, \frac{\pi}{2} - \delta]$ e $[\frac{\pi}{2} + \delta, \pi]$, ed $f \equiv 0$ su tali intervalli. Quindi avviene il passaggio al limite sotto l'integrale

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2} - \delta} 0 dx = 0.$$

Resta $\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_m(x) dx$.

113

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_m(x) dx = \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \underbrace{\left(\frac{1}{m} + \sin^2(x)\right)^m}_{\substack{\downarrow \\ \boxed{\sin^2(x) \leq 1} \\ \boxed{\forall m}}} dx \leq \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} \left(\frac{1}{m} + 1\right)^m dx$$

$$\leq \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} e \cdot dx = 2\delta \cdot e$$

4 qui abbiamo usato che $\left(\frac{1}{m}+1\right)^m \nearrow e$: $\left(\left(\frac{1}{m}+1\right)^m \leq \left(\frac{1}{m+1}+1\right)^{m+1} \leq \dots \leq e\right)$

Abbiamo una stima indipendente da m di $\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_m(x) dx$:

$$\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_m(x) dx \leq 2e \cdot \delta.$$

Quindi

$$\leq \int_0^{\pi} f_m(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} f_m(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}+\delta} f_m(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi} f_m(x) dx \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} f_m(x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\pi} f_m(x) dx + 2e \cdot \delta$$

passando al limite per $m \rightarrow +\infty$

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f_m(x) dx \leq 2e \cdot \delta \quad \underline{\underline{\forall \delta > 0}};$$

Poiché $\delta > 0$ è arbitrario, mandando δ a 0,

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f_m(x) dx \leq 0 \Rightarrow \text{vale l'uguaglianza.}$$

$$\boxed{\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^{\pi} f_m(x) dx = 0}$$

oss. Il risultato si può ottenere molto più semplicemente
ost (dopo aver visto il Teorema B):

f_n definita su $[0, \pi]$ è continua $\forall n$, quindi
in particolare $\forall n \quad f_n \in L^1([0, \pi])$.

$f_n \rightarrow f \equiv 0$ q.o. (cioè $f_n(x) \rightarrow 0$ per p.o. $x \in [0, \pi]$):

in pratica per tutti i punti tranne 1, cioè $\mathbb{R}$).

In più la funzione $g(x) \equiv 0$ è in $L^1([0, \pi])$, chiaramente;

In fine $f_n(x) = \left(\frac{1}{n} + \sin^2(x)\right)^n \leq \left(\frac{1}{n} + 1\right)^n \leq e =: h(x)$;

la funzione $h(x) \equiv e$ su $[0, \pi]$ (la funzione che vale
costantemente e su $[0, \pi]$) è in $L^1([0, \pi])$ chiaramente;

quindi $f_n(x) \rightarrow g(x) \equiv 0$ q.o. su $[0, \pi]$

$f_n(x) \leq h(x) \in L^1([0, \pi])$; $f_n \in L^1([0, \pi]) \quad \forall n$.

quindi per il T. di convergenza dominata

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^\pi f_n(x) = \int_0^\pi g(x) dx = 0 \quad (g(x) \text{ è il "limite quasi ovunque" di } f_n(x)).$$

Finale: la convergenza uniforme è "troppo" per
passare al limite sotto l'integrale: può bastare anche meno!
(quelle q.o. più qualche condizione altre). (Quelle puntuali
è comunque troppo debile!)

Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0$

Sf:

Sia $f_n(t) := (1-t^2)^n$. Studiamo la conv. puntuale:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-t^2)^n = 0 \iff |1-t^2| < 1 \iff 0 < t^2 < 2$$

$\iff \sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ e $t \neq 0$; per $t=0$, $f_n(0) \equiv 1$,

se $t = \pm\sqrt{2}$ il limite non esiste;

se $t > \sqrt{2}$ e $t < -\sqrt{2}$, il limite non esiste;

$$\text{Quindi } f_n(t) \rightarrow f(t) = \begin{cases} 0 & x \in (-\sqrt{2}, \sqrt{2}), x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

Si vede che non c'è convergenza uniforme su $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ad f (in 0 f è discontinua); ci può essere su $(-\sqrt{2}, -\delta]$ e su $[\delta, \sqrt{2})$; f_n è simmetrica. Basta studiarla per $t \geq 0$. ($\delta > 0$).

$$\sup_{t \in [\delta, \sqrt{2})} |f_n(t) - f(t)| = \sup_{t \in [\delta, \sqrt{2})} |(1-t^2)^n| = 1 \not\rightarrow 0 \text{ per } n \rightarrow +\infty; \text{ il problema}$$

è in $\sqrt{2}$. Quindi ci può essere la conv. uniforme in $[\delta, c]$, con $0 < \delta < c < \sqrt{2}$.

$$\frac{d}{dt} (1-t^2)^n = -2tn(1-t^2)^{n-1} = 0 \iff t=0 \text{ o } t=\pm 1; \text{ ma siamo in } [\delta, c]$$

~~quindi la derivata non si annulla mai in $[\delta, c]$~~

~~per cui $f_m(t) = (1-t^2)^m$ non è crescente o decrescente~~

si potrebbe annullare nel caso $1 \in [\delta, c]$; nel punto $t=1$,

$f_m(1) = 0$. Vanno studiati i vari casi

$\left[\begin{array}{l} \delta \leq c \leq 1, \\ \delta \leq 1 < c, \\ \delta < 1 \leq c, \end{array} \right]$, cioè se il punto 1
è presente o meno nell'intervallo $[\delta, c]$. Sono abbastanza

simili. E si prova la convergenza uniforme.

Se come ci è richiesto un integrale tra 0 e 1,
prendiamo $c=1$.

Consideriamo cioè f_m su $[0, 1]$. Abbiamo già detto
che non c'è conv. uniforme in 0. Proviamo su
ogni $[\varepsilon, 1]$, $\forall \varepsilon > 0$. ($\varepsilon < 1$)

$\frac{d}{dt}(1-t^2)^m = -2t^m(1-t^2)^{m-1} = 0$ in $t=1$; poi $f_m(1)=0$; e

$\frac{d}{dt}(1-t^2)^m \leq 0$ su $[\varepsilon, 1]$. Quindi $f_m(t) = (1-t^2)^m$ è decrescente su

$(\varepsilon, 1]$; in più $f_m(\varepsilon) = (1-\varepsilon^2)^m$, $f_m(1)=0$. Quindi

$$\sup_{t \in [\varepsilon, 1]} |f_m(t)| = \max_{t \in [\varepsilon, 1]} |f_m(t)| = (1-\varepsilon^2)^m;$$

$\lim_{m \rightarrow +\infty} (1-\varepsilon^2)^m = 0$. C'è convergenza uniforme su ogni

$[\varepsilon, 1]$, $\forall 0 < \varepsilon < 1$!

Come nell'esercizio precedente, scriviamo

$$\int_0^1 f_m(t) dt = \int_0^\varepsilon f_m(t) dt + \int_\varepsilon^1 f_m(t) dt; \quad \int_\varepsilon^1 f_m(t) dt \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{poiché } f_m(t) \rightarrow 0$$

uniformemente su $[\varepsilon, 1]$, $\forall 0 < \varepsilon < 1$. Stimiamo $\int_0^\varepsilon f_m(t) dt$:

$$\int_0^\varepsilon f_m(t) dt = \int_0^\varepsilon (1-t^2)^m dt \leq \int_0^\varepsilon 1 dt = \varepsilon$$

$\forall \varepsilon$ è importante!!

$$\begin{aligned} & \uparrow \\ 0 & \leq (1-t^2) \leq 1 \\ & \text{se } t \in [0, 1], \\ & \text{quindi } (1-t^2)^m \leq 1 \quad \forall m! \end{aligned}$$

per cui, $\boxed{\forall 0 < \varepsilon < 1, \quad 0 \leq \int_0^\varepsilon f_m(t) dt \leq \varepsilon}$

Scriviamo

$$0 \leq \int_0^1 (1-t^2)^m dt = \int_0^\varepsilon (1-t^2)^m dt + \int_\varepsilon^1 (1-t^2)^m dt \leq \varepsilon + \int_\varepsilon^1 (1-t^2)^m dt$$

è importante,
come anche nell'es.
precedente, questa
disuguaglianza per
poter concludere che
fine!!

$\downarrow$
qui si può
prendere il
limite dentro
l'integrale
perché passiamo
al limite,
poiché c'è c.
uniforme!

passando al limite:

$$0 \leq \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^m dt \leq \varepsilon + \boxed{0}$$

Quindi $\forall \varepsilon > 0$ ($\varepsilon < 1$),

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq \varepsilon \quad \text{Per l'arbitrarietà di } \varepsilon > 0,$$

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt \leq 0 \Rightarrow$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 (1-t^2)^n dt = 0$$

oss. pure qui, non c'è bisogno di dimostrare la
c. uniforme: su $[0, 1]$

$$f_n(t) \rightarrow 0 \quad \forall t \neq 0,$$

$$f_n(0) \equiv 1 \quad \forall n \quad (\Rightarrow f_n(0) \rightarrow 1).$$

In altre parole, $f_n(t) \rightarrow g(t) \equiv 0$ q.s. (cioè per quasi ogni
 $t \in [0, 1]$: non va a 0 solo nel punto $t=0$).

$f_n \in L^1([0, 1]) \quad \forall n$ (Sono continue, su un compatto).

$|f_n(t)| = f_n(t) \leq h(t) \equiv 1 \quad \forall n$: ogni $f_n(t)$ è maggiorata dalle
funzioni
positive
costante 1, (che chiamo $h(t)$). $h(t) \in L^1([0, 1])$ chiaramente.

Per cui, applico T. Convergenza dominata:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(t) dt = \int_0^1 g(t) dt = 0$$

□